Урок 3

Тема уроку : Рівняння дотичної до графіка функції

Підручник з математики для 10-ого класу § 3 п.21

Сьогодні на уроці ви повинні повторити геометричний зміст похідної, щоб далі ознайомитись із рівнянням дотичної до графіка функції та навчитись самостійно складати рівняння дотичної за певним алгоритмом.

Перевірка домашнього завдання

№ 20.2

1) $y' = 10x^4 - 1$; 2) $y' = 7x^6 - \frac{2}{\sqrt{x}}$; 3) $y' = -3cosx - 2sinx$; 4) $y' = -2x^6$.

№ 20.4

1) $y' = 5x^4 + 3x^2 - 4x$; 2) $y' = \sqrt{x} + \frac{x+5}{2\sqrt{x}}$; 3) $y' = 4x^3cosx - x^4sinx$;

4) $y' = tgx + \frac{x}{\cos^2 x}$.

№ 20.6

1) $y' = \frac{-29}{(x-8)^2}$; 2) $y' = \frac{-70}{(10x-3)^2}$; 3) $y' = \frac{4x-12x^2}{(1-6x)^2}$; 4) $y' = \frac{xcosx-sinx}{x^2}$;

5) $y' = \frac{4x}{(x^{2+1})^2}$; 6) $y' = \frac{x^2+4x+12}{(x+2)^2}$.

№ 20. 8 – можливо виконали не всі. Це завдання на знаходження похідної в точці. Давайте пригадаємо, як виконувати такі завдання.

1) $f(x) = \sqrt{x} - 16x, \quad x_0 = \frac{1}{4}$.

Знаходимо спочатку похідну даної функції: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 16$; тепер підставимо замість x значення $\frac{1}{4}$.

Тобто: $f'(x_0) = f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}} - 16 = 1 - 16 = -15.$

Аналогічно виконайте решту завдань. Результати перевірте.

2) $f(x) = \frac{cosx}{1-x}, \quad x_0 = 0.$

$f'(x) = \frac{-sinx(1-x)-cosx(-1)}{(1-x)^2} = \frac{-sinx(1-x)+cosx}{(1-x)^2}.$

$f'(x_0) = f'(0) = \frac{-sin0(1-0)+cos0}{(1-0)^2} = \frac{0+1}{1} = 1.$

3) $f(x) = x^{-2} - 4x^{-3},\ x_0 = 2.$

$f'(x) = -2x^{-3} + 12x^{-4}.$

$f'(x_0) = f'(2) = -2 \cdot 0^{-3} + 12 \cdot 0^{-4} = 0.$

4) $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 1}{x+1}, \quad x_0 = 1.$

$f'(x) = \frac{2x^2 + 4x - 2}{(x+1)^2}$. (Похідну обчисліть самостійно) $f'(x_0) = f'(1) = \frac{2+4-2}{2^2} = 1.$

Для тих, хто хоче знати більше

Розглянемо фізичну задачу з підручника за № 20.9.

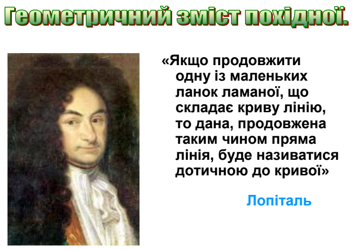
Матеріальна точка масою 4 кг рухається по координатній прямій за законом $s(t) = t^2 + 4$ (переміщення вимірюють у метрах, час – у секундах). Знайдіть імпульс $P(t) = mV(t)$ матеріальної точки в момент часу $t_0 = 2c.$

Розв'язання

Справа в тому, що швидкість руху матеріальної точки – це є похідна від закону руху цієї точки . Тобто: $V(t) = s'(t)$. Скористаймося даною формулою: $V(t) = s'(t) = (t^2 + 4)' = 2t$. Тепер знайдемо швидкість матеріальної точки в момент часу $t_0 = 2c$. $V(t_0) = 2t_0 = 2 \cdot 2 = 4\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Тепер знайдемо, власне, імпульс: $P(t) = mV(t) = 4\text{кг} \cdot 4\text{м/с} = 16\text{кг} \cdot \text{м/с}.$

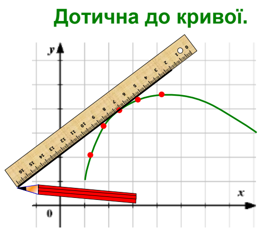
Щоб перейти до вивчення нового матеріалу, давайте пригадаємо геометричний зміст похідної, та що таке є сама дотична. ПОВТОРИТИ

Зверніть увагу, як трактував поняття дотичної до графіка функції, тобто до деякої кривої, ще 300 років тому назад маркіз Лопіталь, послідовник Лейбніца, якого вважають основоположником диференціального числення в математиці.

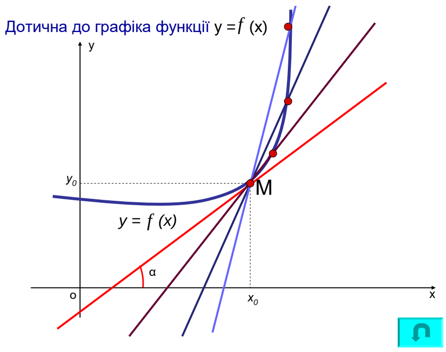


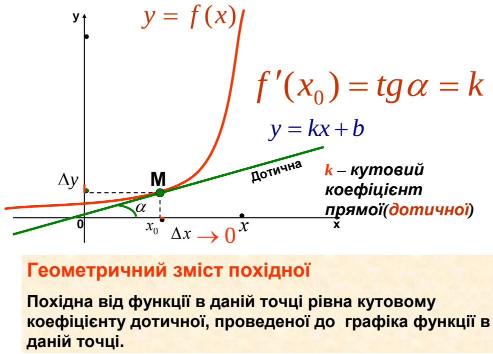
Якщо буде стояти на практиці завдання провести дотичну до кривої, то

осьтак це можна зробити:



Таким чином, ще раз повторимо поняття дотичної: це граничне положення січної.





Пригадайте також, що геометричним змістом похідної є кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції в точці x_0. А що ж таке кутовий коефіцієнт? Чому дорівнює його числове значення? На що він вказує?

- Виконаємо завдання на повторення з підручника.

19.10.˙ Знайдіть за допомогою графіка функції f (рис. 19.1) значення $f'(x_1)$ і $f'(x_2)$.

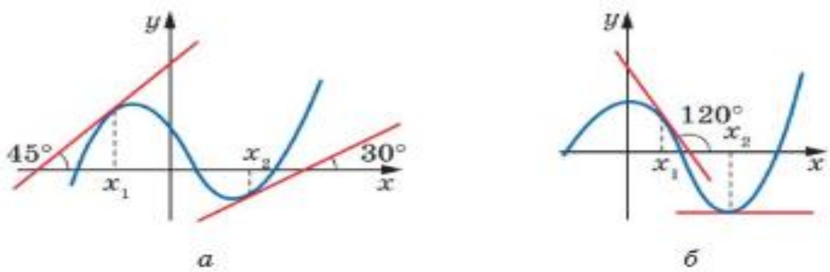
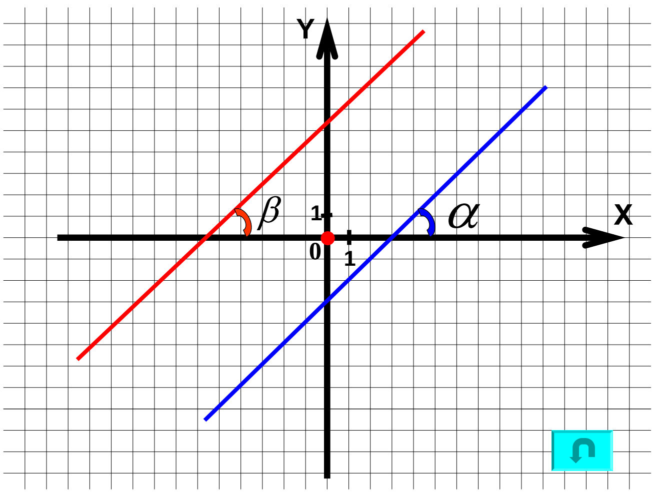


Рис. 19.1

Відповідь: а) $f'(x_1) = tg45° = 1$; $f'(x_2) = tg30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

б) $f'(x_1) = tg120° = -\sqrt{3}$; $f'(x_2) = tg0° = 0$.

З вищезгаданого можемо зробити висновок, що паралельні прямі утворюють однаковий кут нахилу з додатнім напрямом осі абсцис, тобто: $tg\alpha = tg\beta \Rightarrow k_1 = k_2 \Rightarrow f'(x_1) = f'(x_2)$.



Пояснення нового матеріалу

3. Рівняння дотичної до графіка функції

Нехай рівняння прямої, що є дотичною до графіка функції $y = f(x)$ у точці $A(x_0; f(x_0))$, має вигляд $y = kx + l$. Оскільки $k = f'(x_0)$, то воно набуває вигляду: $y = f'(x_0) \cdot x + l$.

Оскільки дотична проходить через точку $A(x_0; f(x_0))$, то координати цієї точки задовольняють рівняння дотичної, тобто $f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + l$, звідки $l = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$.

Отже, підставимо знайдені вирази для k і l в рівняння дотичної:

$$y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0, \text{ тобто}$$

$$\boldsymbol{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).}$$

Отримали *рівняння дотичної до графіка функції* $y = f(x)$ *у точці з абсцисою* x_0.

Задача 4. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \frac{1}{x}$ в точці з абсцисою $x_0 = -4$.

Розв'язання. Маємо: $f(x_0) = f(-4) = -\frac{1}{4}$; $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$; $f'(x_0) = f'(-4) = -\frac{1}{16}$. Підставимо отримані значення в рівняння дотичної: $y = -\frac{1}{4} - \frac{1}{16}(x+4)$. Спростивши вираз у цьому рівнянні, матимемо: $y = -\frac{1}{16}x - \frac{1}{2}$. Відповідь. $y = -\frac{1}{16}x - \frac{1}{2}$.

Отже, щоб скласти рівняння дотичної в заданій точці, слід дотримуватись наступного алгоритму дій:

1. Знайти значення функції в точці x_0, (*тобто знайти* $f(x_0)$);
2. Знайти похідну даної функції, (*тобто знайти* $f'(x)$);
3. Обчислити значення похідної в заданій точці, (*тобто знайти* $f'(x_0)$);
4. Підставити отримані значення в рівняння дотичної, яке може мати і такий вигляд: $\boldsymbol{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$; розкрити дужки та звести подібні доданки.

   Виконайте за даним алгоритмом з підручника № 21.1.

21.1.° Складіть рівняння дотичної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0, якщо:

1) $f(x) = x^2 + 3x$, $x_0 = -1$;
2) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = \frac{1}{2}$;
3) $f(x) = 4\sqrt{x} - 3$, $x_0 = 9$;
4) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$;
5) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \pi$;
6) $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $x_0 = -2$.

Розв'яжемо ще раз, для прикладу, перше задання з цього номеру, а решту –виконайте самостійно, відповіді перевірте.

1) $f(x) = x^2 + 3x, \quad x_0 = -1$; Працюємо за алгоритмом:
   1. $f(x_0) = f(-1) = (-1)^2 + 3 \cdot (-1) = 1 - 3 = -2$;
   2. $f'(x) = 2x + 3$;
   3. $f'(x_0) = f'(-1) = 2 \cdot (-1) + 3 = -2 + 3 = 1$;
   4. Підставимо отримані значення в рівняння дотичної:
   $\boldsymbol{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$.
   Отримаємо: $y = 1 \cdot \left(x - (-1)\right) + (-2) = x + 1 - 2 = x - 1$.
   Відповідь: рівняння дотичної має вигляд: $y = x - 1$.
2) $y = -4x + 4$;
3) $y = \frac{2}{3}x + 3$;
4) $y = x$;
5) $y = -1$;
6) $y = x + 4$.

Тим, хто добре засвоїв тему пропоную виконати наступне завдання підручни

21.3.• Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = x^2 - 3x - 3$ у точці його перетину з віссю ординат.

Розв'язання:

В умові, на відміну від попереднього завдання, немає значення x_0, тому його потрібно віднайти самим. Для цього скористаймося умовою: це точка перетину графіка функції з віссю ординат (а якщо графік перетинає вісь Оу, то абсциса цієї точки дорівнює нулю), тобто $x_0 = 0$. Далі діємо за алгоритмом:

1. $f(x_0) = f(0) = 0^2 - 3 \cdot 0 - 3 = -3$;
2. $f'(x) = 2x - 3$;
3. $f'(x_0) = f'(0) = 2 \cdot 0 - 3 = -3$;
4. Підставимо отримані значення в рівняння дотичної:
   $\boldsymbol{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$.
   Отримаємо: $y = -3 \cdot (x - 0) + (-3) = -3x - 3$.
   Відповідь: рівняння дотичної має вигляд: $y = -3x - 3$.

Домашнє завдання: пройти, за можливістю, тестування: https://learningapps.org/view9553903 або, якщо немає такої можливості, то виконайте № 21.2 (1; 3; 5); № 21.4.